Թեմա 11

Ենթաբազմության վրա մակածված տոպոլոգիան և նրա հատկությունները: Տոպոլոգիական տարածության ենթատարածության հասկացությունը, օրինակներ: Անվերջ չափականության մետրիկային տարածություններ:

Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և $A \subset X$ ոչ դատարկ ենթաբազմություն: Այդ ենթաբազմությունը վերածվում է տոպոլոգիական տարածության, որի τ_A տոպոլոգիան կազմվում է A-ի այն բոլոր ենթաբազմություններով, որոնք ստացվում են A-ի հետ X-ում բաց բոլոր U_i ենթաբազմությունների հատումներից՝ $\tau_A = \{U_i \cap A \mid U_i \in \tau\}$:

Այսպիսով, **ըստ սահմանման**, A բազմությունում բաց ենթաբազմություններ են համարվում X-ում բաց բազմությունների հատումները A-ի հետ:

Ցույց տանք, որ τ_A-ի համար տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմները բավարարվում են: Իրոք,

1. $\varnothing \cap A = \varnothing$, $X \cap A = A$, ուստի $\varnothing$-ը և A-ն պատկանում են τ_A-ին:
2. Քանի որ $\bigcup\limits_i (U_i \cap A) = \left(\bigcup\limits_i U_i\right) \cap A$, ուստի τ_A-ի ցանկացած քանակով $U_i \cap A$ տարրերի միավորումը (որտեղ $U_i \in \tau$) նույնպես պատկանում է τ_A-ին:
3. Քանի որ $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (U_i \cap A) = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i\right) \cap A$, ուստի հատման աքսիոմը ևս տեղի ունի:

Սահմանում: τ_A տոպոլոգիան կոչվում է τ տոպոլոգիայից **մակածված տոպոլոգիա** A ենթաբազմության վրա: Իսկ ինքը՝ (A, τ_A) տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է (X, τ) **տոպոլոգիական տարածության ենթատարածություն**:

Մասնավոր $A = X$ դեպքում $\tau_A = \tau$, և ունենք $(A, \tau_A) = (X, \tau)$ նույնացում:

Սահմանումից հետևում է, որ (A, τ_A) տարածության փակ ենթաբազմությունները նույնպես ստացվում են A-ի հետ X-ում փակ ենթաբազմությունների հատումներով:

Մակածված տոպոլոգիայի հատկություններ:

Հատկություն 1: Ունենք (X, τ) տոպ. տարածություն, $A \subset B \subset X$ ենթաբազմություններ: A ենթաբազմության վրա կարելի է մակածել երկու տոպոլոգիա՝ τ_A (անմիջականորեն τ-ից A-ի վրա) և $(\tau_B)_A$ տոպոլոգիա (նախ τ-ից մակածվում է τ_B տոպոլոգիա B-ի վրա, ապա τ_B-ից մակածվում է տոպոլոգիա A-ի վրա՝ $(\tau_B)_A$): Հետևյալ ակնհայտ $U \cap A = (U \cap B) \cap A$ համընկման շնորհիվ τ_A և $(\tau_B)_A$ տոպոլոգիաները նույնն են:

Հատկություն 2: Եթե $\{V_i;\ i \in I\}$ ընտանիքը բազա է τ տոպոլոգիայի համար, ապա $\{V_i \cap A;\ i \in I\}$ ընտանիքը բազա է τ_A-ի համար (**հիմնավորե՛ք**):

Իսկ եթե $\{U_j(x);\ j \in J\}$ ընտանիքը $x \in A$ կետի շրջակայքերի բազա է (X, τ) տարածությունում, ապա $\{U_j(x) \cap A;\ j \in J\}$ ընտանիքը x կետի շրջակայքերի բազա է (A, τ_A) տարածությունում (**հիմնավորե՛ք**):

Հայտնություն 3: Դիցուք ունենք (X,τ) տոպ. տարածություն, $A \subset X$ ենթաբազմություն, դիտարկենք $i : A \to X$, $i(a) = a$ ներդրումը: Ապա $i : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ արտապատկերումը անընդհատ է: Բացի այդ, τ_A-ն ամենաթույլ տոպոլոգիան է A-ի վրա այնպիսի բոլոր σ տոպոլոգիաների դեպքում, որոնց դեպքում $i:(A,\sigma)\to(X,\tau)$, $i(a)=a$ արտապատկերումներն անընդհատ են:

Ապացուցում: Իրոք, եթե $U \in \tau$ ապա $i^{-1}(U) = U \cap A \in \tau_A$, ուստի i-ն անընդհատ է: Երկրորդ պնդումը հետևում է հետևյալից, որ պայմանները բավարարող ամենա մի σ տոպոլոգիա իր մեջ պարունակում է բոլոր $i^{-1}(U) = U \cap A$, $U \in \tau$ տեսքի ենթաբազմությունները: ■

Եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում և $A \subset X$ ենթաբազմություն, ապա $f_A : A \to Y$, $f_A(a) = f(a)$, $a \in A$ արտապատկերումը կոչվում է f **արտապատկերման սահմանափակում** A ենթաբազմության վրա: Նկատենք, որ $f_A = f \circ i$, որտեղ $i : A \to X$ արտապատկերումը A ենթաբազմության ներդրումն է X-ի մեջ:

Հետևապես սահմանափակումը հատկությունների ներկայացնելիս, ավելի ընդհանուր արտապատկերումների ներդրման դեպքում հատկությունները մասնավոր դեպքերն են:

Դիցուք ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում և $A \subset X$, $B \subset Y$ ենթաբազմություններ: Եթե $f(A) \subset B$, ապա կարող ենք դիտարկել $\bar{f} : A \to B$ արտապատկերումն այնպես, որ $\bar{f}(x) = f(x)$ ամեն մի $x \in A$ կետի համար: Հիշենք f արտապատկերումը կոչվում է f արտապատկերման ներդրումներ ենթաբազմությունների միջև $A \subset X$ և $B \subset Y$ ենթաբազմությունների (երբեմն նշանակվում են նաև $f_{A,B}$ սիմվոլով):

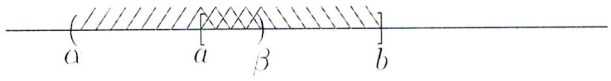
Թեորեմ 1: Եթե (X,τ) և (Y,σ) տոպոլոգիական տարածությունների $f:X\to Y$ արտապատկերումը անընդհատ է, ապա նրան ամեն մի $\bar{f}:A\to B$ ենթաբազմությունների նկատմամբ անընդհատ է, որտեղ $A\subset X$ ենթաբազմությունը դիտարկվում է τ_A տոպոլոգիայով, իսկ $B\subset Y$ ենթաբազմությունը՝ τ_B տոպոլոգիայով:

Ապացուցում: Դիցուք V-ն օրեն բաց ենթաբազմություն է A տարածությունում: Բաց τ_B ենթատարածության տոպոլոգիայի սահմանման համաձայն գոյություն ունի U բաց ենթաբազմություն Y-ում, այնպես որ $V=U\cap B$: Բաց f-ի անընդհատության պայմանից $f^{-1}(U)$-ն բաց է X-ում: Ուստի $\bar{f}^{-1}(V)=f^{-1}(U)\cap A$ ենթաբազմությունը բաց է A ենթատարածությունում բաց τ_A տոպոլոգիայի առնչությամբ: Հետևաբար $\bar{f}$-ն անընդհատ է հատկությունից թեորեմ 9-ում թեորեմ 4-ից: ■

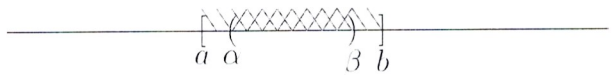
Հիմա քննարկենք ենթատարածությունների մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1: ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության $A = [a, b]$ ենթաբազմության τ_A տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում հետևյալ երեք տեսքերի ենթաբազմությունները, որոնք գոյանում են ինտերվալների $(\alpha, \beta) \cap A$ հատումներով.

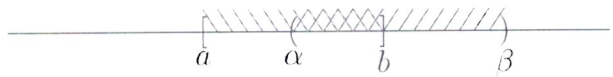
ա) $[a, \beta)$, որտեղ $a < \beta \leq b$



բ) (α, β), որտեղ $a \leq \alpha < \beta \leq b$



գ) $(\alpha, b]$, որտեղ $a \leq \alpha < b$



Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ ենթատարածության բաց բազմությունները կարող են բաց չլինել ընդգրկող տարածությունում: Նկատենք նաև, որ տվյալ (A, τ_A) ենթատարածությունում փակ են $[a, b]$-ի այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնք փակ են նաև ($\mathbb{R}$, սովոր.) ընդգրկող տարածությունում:

Օրինակ 2: $B = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ տոպոլոգիական տարածությունում (որպես ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության ենթատարածություն) բաց են բոլոր (α, β), $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ տեսքի ինտերվալներն ու նրանց միավորումները (այսինքն տվյալ ենթատարածության բաց բազմությունները բաց են նաև ընդգրկող տարածությունում): Նկատենք նաև, որ $(0, 1)$-ում փակ են $(0, \beta]$, $0 < \beta < 1$; $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < 1$; $[\alpha, 1)$, $0 < \alpha < 1$ տեսքերի ենթաբազմություններն ու նրանց վերջավոր միավորումները: Ուստի $(0, 1)$-ում փակ որոշ ենթաբազմություններ փակ չեն ընդգրկող ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությունում:

Ընդհանուր դեպքում, ենթատարածությունում բաց որևէ ենթաբազմություն կարող է չլինել բաց ենթաբազմություն ընդգրկող տարածությունում և ենթատարածությունում փակ որևէ ենթաբազմություն կարող է փակ չլինել ընդգրկող տարածությունում: Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես օգտակար վարժանք քննարկել (նկարագրել) բաց և փակ ենթաբազմությունները ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության $[0, 1)$ և $(0, 1]$ ենթատարածություններում:

V

Թեորեմ 2: Ունենք (X, τ) տոպ. տարածություն և $A \subset X$ ենթաբազմություն: Ապա հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են միմյանց.

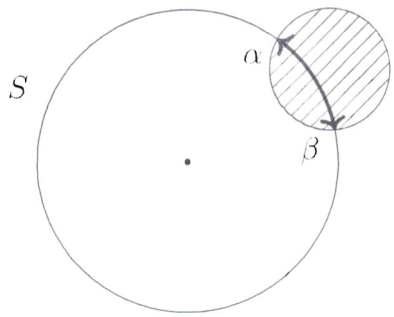
1. (A, τ_A) ենթատարածության կամայական բաց ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է նաև (X, τ) ընդգրկող տարածությունում:
2. A-ն բաց ենթաբազմություն է X-ում:

Նշենք, որ նմանակ պնդում տեղի ունի նաև փակ ենթաբազմությունների դեպքում. հարկավոր է թեորեմ 1-ի ձևակերպման մեջ ամենուրեք «բաց ենթաբազմություն» բառակապակցությունը փոխարինել «փակ ենթաբազմություն»-ով:

Ապացուցում: Ցույց տանք $1 \Rightarrow 2$ անցումը: Քանի որ A-ն բաց ենթաբազմություն է (A, τ_A) տարածությունում, ուստի 1-ից հետևում է, որ A-ն բաց ենթաբազմություն է

նաև X-ում: Այժմ հակառակը. դիցուք A-ն բաց է ենթաբազմության X-ում: Դիտարկենք կամայական V բաց բազմություն A-ում: Ըստ τ_A-ի սահմանման $\exists U \in \tau$, որ $V = U \cap A$: Ուստի V-ն բաց է X-ում՝ որպես X-ում բաց երկու ենթաբազմությունների հատում: ■

Օրինակ 3: Դիտարկենք որևէ S շրջանագիծ $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունում:



Քանի որ $\mathbb{R}^2$-ի մետրիկային տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում անեզր շրջանները, ուստի (համաձայն հատկություն 1-ի) S-ի վրա մակածված տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում շրջանագծի բոլոր անեզր α, β ծայրակետերով աղեղները:

Օրինակ 4: ($\mathbb{R}^3$, սովոր. մետր. տոպ.) տարածությունում դիտարկենք T^2 տորը (մակերևույթ, որն առաջանում է շրջանագիծն իրեն չհատող ուղղի շուրջ պտտության մեջ պտտումով, տե՛ս նաև թեմա 2-ում): Այս մակերևույթի վրա $\mathbb{R}^3$-ից մակածված տոպոլոգիայի համար բազա են կազմում նրա հատումները անեզր գնդերի հետ:

Օրինակ 5: Դիտարկենք ($\mathbb{R}^{n+1}$, սովոր. մետր. տոպ.) տարածության

$$S^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

ենթաբազմությունը (այն կոչվում է $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան տարածության n-չափականության սֆերա): Կարելի է S^n-ի վրա մակածել տոպոլոգիա $\mathbb{R}^{n+1}$-ի մետրիկային տոպոլոգիայից. նրա համար բազա են կազմում S^n-ի հատումները $\mathbb{R}^{n+1}$-ի $(n+1)$-չափա-

կանության անեզր գնդերի հետ: Այս օրինակը կարելի է դիտել որպես օրինակ 3-ի ընդհանրացում:

Օրինակ 6: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունը կարելի է դիտել որպես $\mathbb{R}^{n+1}$ էվկլիդյան տարածության ենթատարածություն կազմված բոլոր $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$ կետերից: հեշտ է V

պետք է, որ $\mathbb{R}^n$-ի մետրիկային տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^n$-ի վրա $\mathbb{R}^{n+1}$-ի մետրիկային տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայի հետ: Նկատենք, որ $\mathbb{R}^n$-ը փակ ենթաբազմություն է $\mathbb{R}^{n+1}$-ում (ինչո՞ւ): Ուստի (համաձայն փակ ենթաբազմության վերաբերյալ թեորեմ 1-ի նմանակ թեորեմի), $\mathbb{R}^n$-ի փակ ենթաբազմությունները փակ են նաև $\mathbb{R}^{n+1}$-ում: Մինչդեռ $\mathbb{R}^n$-ում բաց, ոչ դատարկ որևէ ենթաբազմություն չի կարող լինել բաց ենթաբազմություն նաև $\mathbb{R}^{n+1}$-ում: Ընթերցողին առաջարկում ենք որպես խնդիր ապացուցել այդ պնդումը՝ պարզության համար սկսելով $n = 1, 2$ տեսանելի դեպքերից:

Դիտողություն: $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունների փակ ենթատարածությունների՝ օրինակ 6-ում բերված հատկությունը թույլ է տալիս սահմանել $\mathbb{R}^\infty$ բազմություն և նրա վրա հատուկ տոպոլոգիա: Սահմանենք $\mathbb{R}^\infty$ բազմությունը որպես $\mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 \cup \ldots$ բազմության ֆակտոր-բազմություն՝ կատարելով նրա տարրերի

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0) = \ldots$$

տեսքի նույնացումներ ամեն մի բնական n թվի և իրական թվերի ամեն մի $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ հաջորդականության համար: Թույլ տալով մեզ որոշ ազատություն՝ կարող ենք համարել, որ $\mathbb{R}^\infty$-ը իրական թվերից կազմված բոլոր անվերջ $(x_1, x_2, \ldots)$ հաջորդականությունների բազմությունն է, որոնց անդամները սկսած որոշ տեղից զրոներ են: Ստանդարտ եղանակով $\mathbb{R}^\infty$-ը վերածվում է անվերջ չափականության իրական գծային տարածության՝ հաջորդականությունների անդամ առ անդամ գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններով: Սահմանենք տոպոլոգիա $\mathbb{R}^\infty$-ի վրա՝ համարելով փակ ամեն մի $F \subset \mathbb{R}^\infty$ ենթաբազմություն այն և միայն այն դեպքում, երբ ամեն մի n-ի դեպքում փակ է $F \cap \mathbb{R}^n$ հատումը: Տոպոլոգիայի F1-F3 աքսիոմները ստուգվում են հեշտությամբ:

$\mathbb{R}^\infty$-ում կարելի է սահմանել տոպոլոգիա ուրիշ եղանակով՝ վերածելով $\mathbb{R}^\infty$-ը մետրիկային տարածության $\left(\rho(x, y)\right)^2 = \sum\limits_{i \geq 1} (x_i - y_i)^2$ մետրիկով:

Նշենք, որ $\mathbb{R}^\infty$-ի այս երկու տոպոլոգիաները համարժեք չեն, քանի որ օրինակ՝

$$A = \left\{ \left(1, 0, 0, \ldots\right), \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right), \left(0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots\right), \ldots \right\}$$

ենթաբազմությունը ակնհայտորեն փակ է $\mathbb{R}^\infty$-ի առաջին տոպոլոգիայում, բայց փակ չէ երկրորդ տոպոլոգիայում: Իրոք, $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ կետի ցանկացած ε-շրջակայք ունի ոչ դատարկ հատում A-ի հետ, բայց 0-ն չի պատկանում A-ին (**հիմնավորե՛ք**):

Սահմանվում է $\mathbb{R}^\infty$ բազմություն և նրա վրա տոպոլոգիա ևս մի եղանակով, այս դեպքում $\mathbb{R}^\infty$-ի տարրեր են համարվում բոլոր $(x_1, x_2, \ldots)$ տեսքի հաջորդականու-

թյունները՝ պայմանով, որ զուգամիտում է $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ շարքը: Այս դեպքում նույնպես $\mathbb{R}^\infty$-ը վերածվում է մետրիկային տարածության, որը նշանակվում է ℓ_2-ով և կոչվում է հիլբերտյան տարածություն (մանրամասները տե՛ս [ ]-ում):

Այժմ ներկայացնենք մակածված տոպոլոգիա և ենթատարածություն հասկացություններին առնչվող մի քանի պարզ և հաճախ կիրառվող փաստեր:

Լեմմա: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն և որևէ ոչ դատարկ $A \subset X$ ենթաբազմություն: Դիտարկենք $i : A \to X$, $i(a) = a$ ներդրումը: Ապա $i : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ արտապատկերումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Իրոք, եթե $U \in \tau$, ապա $i^{-1}(U) = U \cap A \in \tau_A$: ■

Նկատենք, որ τ_A-ն այն ամենաթույլ տոպոլոգիան է A-ի վրա, որի դեպքում i արտապատկերումը անընդհատ է (**հիմնավորե՛ք**):

Եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում և $A \subset X$ ենթաբազմություն, ապա $f_A : A \to Y$, $f_A(a) = f(a)$, $a \in A$ արտապատկերումը կոչվում է f **արտապատկերման սահմանափակում** A ենթաբազմության վրա: Նկատենք, որ $f_A = f \circ i$, որտեղ $i : A \to X$, արտապատկերումը A ենթաբազմության ներդրումն է X-ի մեջ՝ $i(a) = a$, $\forall a \in A$:

Թեորեմ 2: Եթե տոպոլոգիական տարածությունների $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ արտապատկերումը անընդհատ է, ապա $\forall A \subset X$ ենթաբազմության դեպքում f արտապատկերման $f_A : (A, \tau_A) \to (Y, \sigma)$ սահմանափակումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Շնորհիվ լեմմայի՝ f_A-ն անընդհատ է որպես i և f անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ: ■

Հաճախ դիտարկվում է նաև հակառակ խնդիրը. պահանջվում է X-ի A ենթաբազմության վրա տրված $g : A \to Y$ անընդհատ արտապատկերումը շարունակել մինչև $f : X \to Y$ անընդհատ արտապատկերում: Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում խնդիրը լուծում չունի (անընդհատ շարունակում կարող է գոյություն չունենալ):

Երբեմն անհրաժեշտություն է առաջանում տրված երկու անընդհատ արտապատկերումներից «կարել» կամ «սոսնձել» մի երրորդ անընդհատ արտապատկերում: Բերենք այդպիսի հնարավորության օրինակ:

Թեորեմ 3: Դիցուք ունենք X և Y տոպոլոգիական տարածություններ, ընդ որում $X = A \cup B$, որտեղ A-ն և B-ն փակ ենթաբազմություններ են X-ում: Դիցուք $f : A \to Y$ և $g : B \to Y$ անընդհատ արտապատկերումներն այնպիսին են, որ $f(x) = g(x)$ ցանկացած $x \in A \cap B$ կետում: Դիտարկենք $h : X \to Y$ արտապատկերումը, որտեղ $h(x) = f(x)$, երբ $x \in A$ և $h(x) = g(x)$, երբ $x \in B$: Ապա h արտապատկերումը անընդհատ է:

Ապացուցում: Նախ պարզ է, որ h-ը սահմանված է կոռեկտ: Դիցուք F-ը կամայական փակ բազմություն է Y-ում: Ունենք՝

$$h^{-1}(F) = h^{-1}(F) \cap (A \cup B) = (h^{-1}(F) \cap A) \cup (h^{-1}(F) \cap B) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F):$$

Քանի որ F-ը փակ է Y-ում և f-ը անընդհատ է, ուստի $f^{-1}(F)$-ը փակ է A-ում: Հետևաբար $f^{-1}(F)$-ը փակ է նաև X-ում (այստեղ օգտվեցինք թեորեմ 1-ի նմանակից՝ հաշվի առնելով, որ A-ն փակ է X-ում): Նույնանման դատողություններով, $g^{-1}(F)$-ը ևս փակ է X-ում: Հետևաբար $h^{-1}(F)$-ը փակ է X-ում, ուստի h-ը անընդհատ է ըստ թեմա 9-ում թեորեմ 4-ի: ■

Վերը բերված 1-6 օրինակները ցույց են տալիս, որ տոպոլոգիական տարածության ենթատարածություն հասկացությունը հնարավորություն է տալիս արդեն հայտնի տարածություններից ստանալ բազմաթիվ նոր տարածություններ՝ դրանց ենթատարածությունների տեսքով:

Վերլուծական երկրաչափության դասընթացում կատարվում է 2-րդ կարգի կորերի և 2-րդ կարգի մակերևույթների մետրիկային և աֆինական դասակարգումներ:

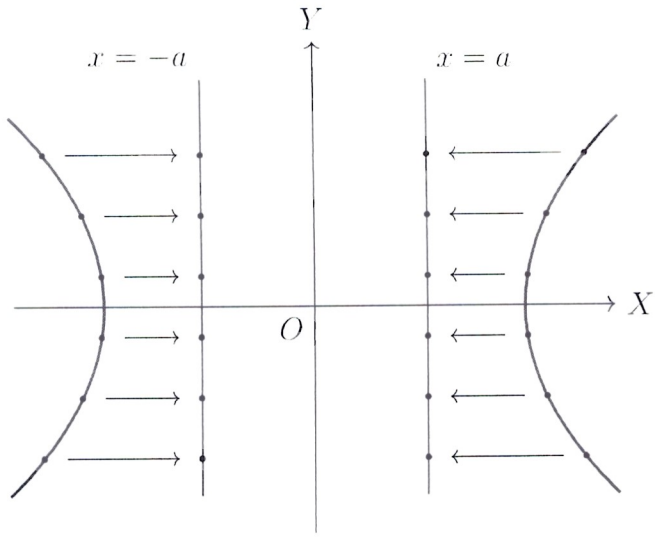
Յուրաքանչյուր 2-րդ կարգի կոր կարող ենք դիտել որպես տոպոլոգիական տարածություն, հարթության սովորական մետրիկային տոպոլոգիայից կորի վրա մակածված տոպոլոգիայով այնպես, ինչպես դա արված է օրինակ 3-ում շրջանագծի դեպքում: Իսկ յուրաքանչյուր 2-րդ կարգի մակերևույթ կարող ենք դիտել որպես տոպոլոգիական տարածություն $\mathbb{R}^3$ էվկլիդյան տարածության տոպոլոգիայից մակերևույթի վրա մակածված տոպոլոգիայով այնպես, ինչպես դա նկարագրված է օրինակ 4-ում տորի դեպքում:

Առաջանում է խնդիր. կատարել 2-րդ կարգի կորերի և 2-րդ կարգի մակերևույթների **տոպոլոգիական դասակարգումներ**:

Քանի որ իզոմետրիկ և աֆինական ձևափոխությունները փոխմիարժեք և անընդհատ արտապատկերումներ են, ուստի միմյանց մետրիկորեն կամ աֆինորեն համարժեք ցանկացած երկու 2-րդ կարգի կոր կամ մակերևույթ նաև տոպոլոգորեն համարժեք են, այսինքն հոմեոմորֆ են:

Նկատենք, որ աֆինորեն ոչ համարժեք երկու կոր կամ մակերևույթ կարող են լինել տոպոլոգորեն համարժեք: Օրինակ՝ ցանկացած հիպերբոլ հոմեոմորֆ է զուգահեռ իրական ուղիղների զույգի:

Իրոք, տեղադրելով հիպերբոլն ու ուղիղների զույգը միմյանց նկատմամբ հարմար դիրքով՝ կարող ենք զուգահեռ պրոյեկտել դրանցից մեկը մյուսի վրա, ինչպես ցույց է տրված ստորև գծագրում:



Կորերի և մակերևույթների լիարժեք տոպոլոգիական դասակարգումը ենթադրում է ոչ միայն հաստատել, որ տվյալ երկու կորը կամ մակերևույթը հոմեոմորֆ են, այլ նաև ցանկացած երկու կորի կամ մակերևույթի դեպքում հիմնավորել նրանց ոչ հոմեոմորֆությունը, եթե չի հաջողվում կառուցել հոմեոմորֆիզմ նրանց միջև: Օրինակ՝ ինչպես գիտենք, որևէ էլիպս աֆինորեն համարժեք չէ որևէ հիպերբոլի, քանի որ աֆինական ձևափոխությունները սահմանափակ պատկերները արտապատկերում են սահմանափակ պատկերների (էլիպսը սահմանափակ պատկեր է, հիպերբոլը՝ ոչ):

Աֆինական ձևափոխությունների այս հատկությունը կարելի է վերաձևակերպել նաև այսպես՝ պատկերի սահմանափակությունը (ինչպես նաև անսահմանափակությունը) **աֆինական հատկություն** է: Բայց (ինչպես դա հետևում է ստորև 12.6 խնդրից) պատկերի սահմանափակությունը չի հանդիսանում տոպոլոգիական հատկություն: Ուստի հիմնավորելու համար, որ էլիպսը և հիպերբոլը տոպոլոգորեն համարժեք չեն (հոմեոմորֆ չեն) անհրաժեշտ է գտնել պատկերների որևէ տոպոլոգիական հատկություն, որով օժտված լինի այդ պատկերներից միայն մեկը: Այդպիսի որոշ տոպոլոգիական հատկություններ կկառուցվեն հաջորդ թեմաներում:

Իսկ մենք այստեղ սահմանափակվենք նշելով, որ այնպիսի երկրաչափական պատկերներ կամ մեծություններ, որպիսիք են՝ անկյուն, հատված, բազմանկյուն, երկարություն, մակերես, ծավալ, չեն հանդիսանում տոպոլոգիական հատկություններ կամ տոպոլոգիական ինվարիանտներ:

Վերջում կանգ առնենք տոպոլոգիական տարածությունների այսպես կոչված ժառանգական հատկություն հասկացության վրա: Ըստ սահմանման՝ տոպոլոգիական տարածության P հատկությունը կոչվում է **ժառանգական**, եթե այդ հատկությամբ օժտված ամեն մի տոպոլոգիական տարածության ցանկացած ենթատարածություն նույնպես օժտված է այդ հատկությամբ:

Տոպոլոգիական տարածությունների մեզ արդեն ծանոթ հատկություններից ժառանգական են անջատելիության T_0, T_1, T_2 աքսիոմները, հաշվելիության առաջին և երկրորդ աքսիոմները, տարածության մետրիկացումը:

Ցույց տանք օրինակ, որ տարածությունը ռեգուլյարությունը միշտ կարող է խախտվել:

Դիցուք X-ը ռեգուլյար տարածություն է (բավարարում է T_1 և T_3 աքսիոմներին), իսկ A-ն կրկնակի դեպքում ոչ դատարկ ենթաբազմություն է դիտարկվում X-ից կրկնակի մետրիկական գրաֆիկայով: Ապացուցենք, որ A գրաֆիկայի տարածությունը բավարար հոգեկարգ բավարարում է անջատելիության T_1 և T_3 աքսիոմներին: Բայց քանի որ 5-ով բերված 4-ի X-ի միկրոբազայի ամենակա մի $\{x\}$ ենթաբազմությունը փակ է X-ում: Հետևաբար բոլոր միկրոբազայի $\{x\}$, $x \in A$ ենթաբազմությունները փակ են A ենթատարածությունում (բայց մետրիկական գրաֆիկայի ստանալուց): Պարզենք A-ն T_3 տարածություն է: Ցույց տանք որ A-ն T_3 տարածություն է: Դիտարկենք A տարածությունում կամայական F փակ ենթաբազմությունը և կամայական գրաֆիկայում դրված է $x_0 \in A$ կետը: Գտնենք ունի X-ում փակ F' ենթաբազմություն, որ $F = F' \cap A$: Պարզ է, որ $x_0 \notin F'$: Ունենք գտնված ունենք x_0-ի U և F' V չհատվող շրջակայքեր X-ում: Դրանից հետևում է, որ $U \cap A$ և $V \cap A$ ենթաբազմությունները x_0-ի և F-ի չհատվող շրջակայքեր են A ենթատարածությունում: Այսպիսով A-ն բավարարում է նաև T_3 աքսիոմին, այսինքն A-ն ռեգուլյար տարածություն է: ■

Մետրիկական տարածությունների

n-չ ժառանգական հատկություններ են սեպարաբելությունը, լինդելյոֆությունը, կապակցվածությունը, գծային կապակցվածությունը, կոմպակտությունը (վերջին երեք հասկացությունների հետ կծանոթանանք հաջորդ թեմաներում):

Հոմեոմորֆիզմներ. կոմպակտություններ

ոչ ժառանգական հատկություններ են սեպարաբելությունը, լինդելյոֆությունը, կապակցվածությունը, գծային կապակցվածությունը, կոմպակտությունը: Վերջին երեք հասկացությունների հետ կծանոթանանք հաջորդ թեմաներում:

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 11-ի վերաբերյալ:

11.1. Ունենք $f: X \to Y$ անընդհատ արտապատկերումը և $A \subset X$ ենթաբազմությունը: Ցուցադրեք թեորեմ 1-ի վրա ապացույցի, որ f-ի սահմանափակումը A-ի վրա անընդհատ է:

12.2. Եթե ունենք (X, ρ) մետրիկային տարածություն, ապա ամեն մի ոչ դատարկ $A \subset X$ ենթաբազմության վրա կարելի է սահմանել տոպոլոգիա երկու եղանակով:

Առաջին դեպքում դիտարկենք ρ մետրիկի $\rho|_A$ սահմանափակումը A-ի վրա և վերցնենք $\rho|_A$ մետրիկով որոշված $\tau[\rho|_A]$ մետրիկային տոպոլոգիան:

Երկրորդ դեպքում դիտարկենք X-ի $\tau[\rho]$ մետրիկային տոպոլոգիան և վերցնենք նրանով մակածված $\tau[\rho]_A$ տոպոլոգիան A-ի վրա:

Հարց. Նո՞ւյնն են արդյոք միշտ $\tau[\rho|_A]$ և $\tau[\rho]_A$ տոպոլոգիաները:

Ցուցում. Պատասխանը գրեթե ակնհայտ դրական է, իսկ ստուգումը կատարվում է զուտ սահմանումների մակարդակով:

11.3. Նկարագրեք թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայից ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ ենթաբազմության վրա, բ) ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$ ենթաբազմության վրա մակածված տոպոլոգիաները:

11.4. ~~12.3.~~ Ապացուցեք, թվային ուղղի ցանկացած երկու

ա) (a, b) և (c, d) տեսքի միջակայքեր սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիաներով հոմեոմորֆ տարածություններ են,

բ) նույնը $[a, b]$ և $[c, d]$ տեսքի միջակայքերի դեպքում,

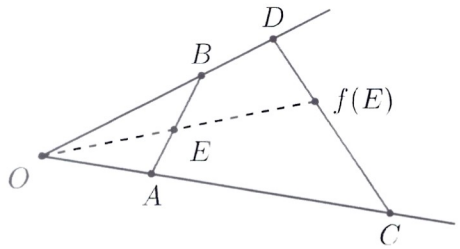
գ) եթե միջակայքերը տարբեր տեսքերի են՝ մեկը բաց է կամ փակ է, իսկ մյուսը կիսաբաց է, կամ մեկը բաց է, իսկ մյուսը փակ է, ապա ստացված տոպոլոգիական տարածությունները հոմեոմորֆ չեն:

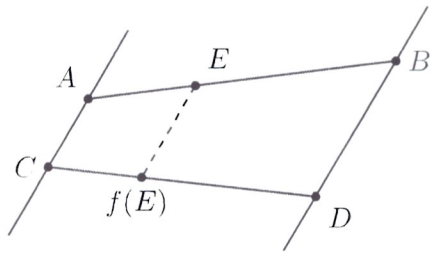
Ցուցում. Դիտարկեք $f : (a, b) \to (c, d)$, $f(x) = c + \dfrac{d-c}{b-a}(x - a)$ անընդհատ արտապատկերումը և, օգտվելով 1, 2 օրինակներից, կիրառեք թեորեմ 6-ը թեմա 11-ում:

11.5 Դիցուք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունում ունենք երկու AB և CD հատվածներ: Դիտարկելով այդ հատվածները որպես $\mathbb{R}^2$ տարածության ենթատարածություններ $\mathbb{R}^2$-ից նրանց վրա մակածված տոպոլոգիաներով՝ կառուցեք որևէ $f : AB \to CD$ հոմեոմորֆիզմ:

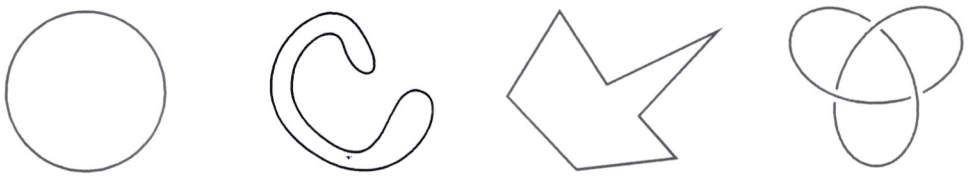
Ցուցում. Ներմուծելով $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ կոորդինատներ՝ կազմեք AB և CD պարամետրական հավասարումներ նույն $t \in [0, 1]$ փիրույթով և կատարեք պարամետրի արտաքսում:

Որոշ դեպքերում պահանջվող հոմեոմորֆիզմը կարելի է կառուցել երկրաչափորեն՝ կենտրոնային կամ զուգահեռ պրոյեկտումով, ինչպես ցույց է տրված ստորև օրինակներում:





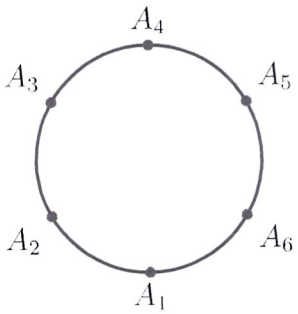
11.6 12. Ստորև պատկերված են ա) շրջանագիծ, բ) օվալ (ինքն իրեն չհատող փակ գիծ), գ) բազմանկյուն՝ որպես էվկլիդյան հարթության ենթապարածություններ, և ինքն իրեն չհատող երեքնուկաձև փակ գիծը՝ որպես եռաչափ տարածության ենթապարածություն:

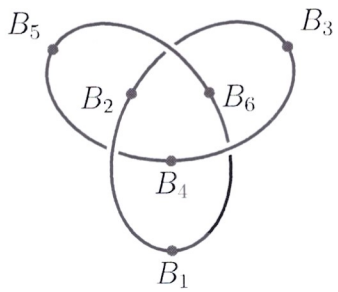


(ա) (բ) (գ) (դ)

Ապացուցեք, որ դրանք հոմեոմորֆ են իրար:

Յուցում. Շրջանագծի վրա վերցրեք $A_1, A_2, \ldots, A_6$ կետեր, «երեքնուկի» վրա՝ $B_1, B_2, \ldots, B_6$ կետեր:





Ընտրելով $f_i : A_iA_{i+1} \to B_iB_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$ և $f_6 : A_6A_1 \to B_6B_1$ հոմեոմորֆիզմներ՝ կառուցեք հոմեոմորֆիզմ շրջանագծի և «երեքնուկի» միջև օգտվելով թեորեմ 3-ից:

11.7 12. Դիտարկենք թվային ուղղի $(-1, 1)$ ենթաբազմությունը նրա վրա սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով: Ապացուցեք, որ այդ տարածությունը հոմեոմորֆ է ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությանը:

Յուցում. Օգտվեք թեմա 1-ի օրինակ 9-ում բերված արտապատկերումից:

11.7 – 11.10

Ստորև խնդիրներում կորերը և մակերևույթները դիտարկվում են համապատասխանաբար ($\mathbb{R}^2$, սովոր.) և ($\mathbb{R}^3$, սովոր.) տարածություններից մակածված տոպոլոգիաներով: Ապացուցեք.

11.8 ~~12.8.~~ ցանկացած պարաբոլ հոմեոմորֆ է ուղղի;

11.9 ~~12.9.~~ ցանկացած միախոռոչ հիպերբոլոիդ հոմեոմորֆ է ուղիղ շրջանային գլանի;

11.10 ~~12.10.~~ ցանկացած երկխոռոչ հիպերբոլոիդ հոմեոմորֆ է հարթությունների զույգի;

11.11 ~~12.11.~~ ցանկացած էլիպսական պարաբոլոիդ հոմեոմորֆ է հարթության;

11.12 ~~12.12.~~ Ապացուցեք, հաշվելիության առաջին և երկրորդ աքսիոմները ժառանգական հատկություններ են: Այսինքն՝ եթե որևէ փարածություն բավարարում է առաջին (երկրորդ) աքսիոմին, ապա նրա ցանկացած ենթափարածություն նույնպես բավարարում է այդ նույն աքսիոմին:

Սրարկ 11.13 և 13.14 խնդիրներում [a, b], [a, b) հատվածները դիտարկված են թվային ուղղի սովորական топологիայի նկատմամբ топологիաներով:

11.13 ~~9.7.~~ Ապացուցեք, որ ցանկացած $f : [a, b] \to [a, b]$ անընդհատ արտապատկերում ունի անշարժ կետ (այսինքն $f(x) = x$ գոնե մի $x \in [a, b]$ կետի դեպքում):

Յուցում. Դիտարկեք $g(x) = f(x) - x$ արտապատկերումը:

11.14 ~~9.8.~~ Կարելի՞ է պնդել, որ ցանկացած անընդհատ ա) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ տեսքի, բ) $[a, b) \to [a, b)$ տեսքի արտապատկերում ունի անշարժ կետ: Պատասխանը հիմնավորեք դատողություններով կամ օրինակներով: